Épreuve Commune de TIPE

FICHE SYNOPTIQUE 2016

01/08/2016 10:42
Impression candidat

WILLEMS Lucas, 18920
Sujet **Etude de l'équirépartition de suites denses**
Travail effectué en groupe de 4 personnes

Présentation :

Au cours de l'année, nous avons étudié la notion de densité, que ce soit la densité d'un ensemble dans un autre, ou la densité d'une suite dans un ensemble. Par curiosité, je me suis intéressé à l'organisation des termes des suites denses : c'est là qu'apparaît la notion d'équirépartition.

Mon travail a consisté à appréhender, d'abord de manière intuitive, puis de manière formelle le lien entre les notions de densité et d'équirépartion d'une suite.

Démarche :

Tout d'abord, j'ai essayé de comprendre le lien entre les notions de densité et d'équirépartion d'une suite de manière intuitive. Pour ce faire, j'ai réalisé un programme graphique en Python prenant en entrée une suite à valeur dans [0, 1] et représentant la répartition de ses termes en éclairant les parties du segment [0, 1] en fonction de la proportion de termes s'y trouvant : les parties blanches du segment sont celles où il y a le plus de termes et celles noires où il y en a le moins. Une suite est équirépartie si l'éclairement est uniforme sur le segment.

Ensuite, j'ai étudié le lien entre ces 2 notions de manière plus formelle. Je me suis, d'abord, demandé si de toute suite dense dans [0, 1], il est possible d'extraire une suite équirépartie. Initiallement, je n'étais pas du tout convaincu que cela soit possible. Puis, j'y ai petit à petit cru en cherchant. Après une 1ère tentative infructueuse, en changeant d'angle d'approche, j'ai réussi à montrer ce résultat, et suis même allé plus loin : j'ai montré qu'un certain réordonnement des termes d'une suite (sans en enlever) peut rendre n'importe quelle suite dense équirépartie et n'importe quelle suite équirépartie simplement dense. Ce résultat montre que la seule différence entre suite équirépartie et suite dense est l'ordre d'apparition des termes et met clairement en évidence le lien entre ces 2 notions.

Finalement, après avoir étudié la question de la conservation de l'équirépartition après réordonnement des termes d'une suite, je me suis attaché à la question connexe de la conservation de l'équirépartition de l'image d'une suite par une fonction. Après de nombreuses recherches et nombreux échecs, j'ai finalement réussi à montrer que si une fonction continue conserve l'équirépartition d'une seule suite, elle conserve l'équirépartion de toutes les suites. J'ai ensuite caractérisé les fonctions dérivables conservant l'équirépartition, puis suis arrivé au résultat qu'il n'existe pas de fonctions f dérivables T périodiques à valeurs dans [0, 1] telles que (f(n)) soit équirépartie dans [0, 1].

Plan :

<u>I. Introduction à l´équirépartition</u>
1) Approche intuitive
2) Existence de suites équiréparties
<u>II. Représentation graphique</u>
1) Coloration de [0, 1]
2) Fonctions de répartition
<u>III. Lien entre densité et équirépartition</u>
1) Extraction d´une suite équirépartie à partir d´une suite dense
2) Passage d´une suite dense à équirépartie en réorganisant les termes
<u>IV. Problème connexe : fonctions conservant l´équirépartition</u>
1) Approche intuitive
2) Cas des fonctions continues et dérivables
<u>Ouverture : vers une généralisation ?</u>

Bilan :

En plus de me former à un vrai travail de groupe, ce TIPE m'a appris à ne pas désespérer si après de nombreuses tentatives, je n'arrive pas à démontrer un résultat : toujours continuer à chercher et croire en son intuition.

Remerciements :

Je tenais à remercier Andrew Sutherland (MIT) qui a gentiment levé certaines de nos interrogations en nous apportant des éléments de réponses par rapport à des résultats, finalement faux, trouvés sur internet.

Bibliographie :

[1] <u>Equirépartition d´une suite de nombres</u> par CHOMETTE et BOUCEKKINE
[2] <u>Uniform distribution of sequences</u> par KUIPERS et NIEDERREITER
[3] <u>Théorie de la mesure et de l´intégration</u> par GALLAY
[4] <u>Sato-Tate distributions</u> par SUTHERLAND